GRAEFE

BESTIMMUNG

DES SCHWERPUNCTES

UEBER EINE ALLGEMEINE FORMEL

ZUR

BESTIMMUNG DES SCHWERPUNCTES

VON KÖRPERN.

EINE FOLGERUNG

AUS DER LEHRE ÜBER DAS WITTSTEIN'SCHE PRISMATOID.

VON

V. v. GRAEFE.

HAMBURG.
OTTO MEISSNER.
1866.

Bei einer Untersuchung der Formel, deren man sich beim Schiffbau zur Berechnung des Deplacement-Schwerpunctes, d. h. des Schwerpunctes der vom Schiffe verdrängten Wassermasse bedient, fiel es mir auf, dass der Beweiss dieser Formel, so wie er in Chapman's Architectura navalis mercatoria, Stockholm 1775, gegeben und von dort in alle übrigen mir bekannten Werke, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigen, übergegangen, auf eine Anschauung begründet ist, die Vielen unverständlich oder doch nicht bindend genug erscheinen möchte. —

Nun ergiebt die treffliche Abhandlung des Herrn Dr. T. Wittstein, Hannover 1860, über das Prismatoid eine allgemeine, sehr bequeme Formel zur Berechnung des cubischen Inhaltes von Körpern und daraus als unmittelbare Folgerung die ebenfalls auf Körper ausgedehnte Simpson'sche Formel, deren man sich seit Chapman zur Berechnung des cubischen Inhaltes des Deplacements beim Schiffbau bedient. Der Gedanke lag also nahe, dass sich aus der Betrachtung über das Prismatoid in Bezug auf seinen Schwerpunct eine ähnliche allgemeine Formel zur Berechnung des Schwerpunctes von Körpern und schliesslich die oben erwähnte Methode zur Berechnung des Deplacement-Schwerpunctes beim Schiffbau auf bindende Weise würde ableiten lassen und fand ich mich in dieser Voraussetzung nicht getäuscht. Da aber die durch eine sehr einfache Betrachtung gefundene Schwerpunctformel des Prismatoids, aus dem gefolgert ist, was Dr. Wittstein über den Inhalt dieses Körpers aufgestellt hat, so kann ich nicht umhin, erst in möglichster

Kürze die Formel des Dr. Wittstein über den Inhalt des Prismatoids zu entwickeln, da dann das Uebrige ohne Schwierigkeit von selbst folgt.

§. 1.
Ueber das Prismatoid und seinen cubischen Inhalt.

Unter Prismatoid verstehen wir einen von zwei unter sich parallellen, in ihrer Form und Grösse aber von einander unabhängigen und beliebigen Grundflächen und einen durch eine Anzahl von Seitenebnen gebildeten Mantel eingeschlossenen Körper.

Die Seitenebnen des Prismatoids werden im Allgemeinen Dreiecke sein und zwar sind deren so viele, wie die Summe der Seiten der beiden Grundflächen, da jede dieser Seiten ein Dreieck liefern kann, wie Fig. 1 veranschaulicht. In derselben hat beispielsweise die obere

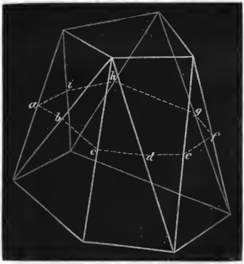

Fig. 1.

Fläche vier, die untere fünf Seiten und wird der Mantel demnach von neun Dreiecken gebildet. Würden aber zwei der Seiten der beiden Grundflächen paralell, so fällt die Kante zwischen zwei Dreiecken fort und diese bilden entweder ein Trapez oder ein Paralellogramm, wie bei der abgestumpften Pyramide oder dem Prisma, wodurch die Zahl der Seitenebnen dieser Körper, welche als Specialitäten des Prismatoids zu betrachten sind, verringert wird.

Bezeichnen wir die untere und obere Grundfläche mit G und g, eine durch die halbe Höhe, h, des Körpers mit den Grundflächen parallell gelegte Durchschnittsfläche a b c d e f g h i mit D (die fortan die mittlere Durchschnittsfläche heissen soll), so ist der cubische Inhalt des Prismatoids:

$$I = \frac{h}{3}\left\{\frac{G+g}{2} + 2\,D\right\}.$$

Um diese Formel zu beweisen, schicken wir folgenden Hülfssatz voraus.

Hülfssatz. Wenn man durch die Mitten von vier Kanten eines Tetraeters A B C D (Fig. 2) eine Durchschnittsfläche a b c d legt, so be-

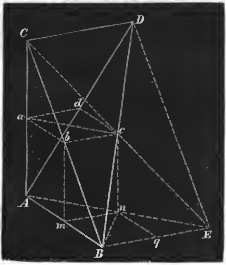

Fig. 2.

trägt der cubische Inhalt dieses Tetraeders so viel, als der eines andern, dessen Basis doppelt so gross als die Durchschnittsfläche a b c d und dessen Höhe gleich dem kürzesten Abstande der beiden übrigen Kanten A B und C D des ersten Tetraeders ist.

Beweis. Man ziehe B E paralell C D und verlängere C c bis E, verbinde diesen Punct mit A und D, so ist das gegebene Tetraeder A B C D gleich dem hierdurch gebildeten A B C E, weil sie die Basis A B C gemein haben und ihre Spitzen D und E in der der Basis paralellen Graden D E liegen. Die Durchschnittsfläche a b c d, welche ein Paralellogramm ist, weil ihre Seiten a b und c d, a d und b c paarweis den Kanten AB und CD paralell sind, ist halb so gross als das Dreieck A B E. Denn, wenn man die Diagonale a c zieht und die Mitten der Seiten von A B E, m, n, q miteinander und n mit B verbindet, so ist das Dreieck a b c viermal in A B E enthalten, weil die Dreiecke A m n und n q E ihm congruent und m n B, B n q diesen flächengleich sind, wie leicht einzusehen. Da nun a b c halb so gross als das Paralellogramm a b c d, so ist dieses halb so gross als das Dreieck A B E. Betrachtet man nun A B E als die Basis des Tetraeders A B C E, so ist die Höhe desselben gleich dem kürzesten Abstand der Kanten C D nnd A B des Tetraeders A B C D, denn C D ist paralell der Basis A B E, weil paralell B E, und daher alle Lothe von C D anf A B E einander gleich, also auch die Höhe des Tetraeders A B E C, d. h. ein Loth von C anf A B E gleich dem kürzesten Abstande der beiden Kanten C D und A B, welcher abermals ein Loth von C D auf die Grade A B sein würde. Mithin ist der Inhalt des Tetraeders A B C D gleich dem des Tetraeders A B C E, dessen Basis gleich der doppelten Durchschnittsfläche a b c d und dessen Höhe gleich dem kürzesten Abstand der beiden Kanten C D und A B.

Wir gehen nun zum Beweise der obigen Formel für den cubischen Inhalt des Prismatoids über.

Die nebenstehende Fignr sei ein Prismatoid, dessen Basis G ein nnregelmässiges Fünfeck, dessen obere Fläche g ein unregelmässiges Viereck. Der senkrechte Abstand von G und g oder die Höhe sei h. Die mittlere Dnrchschnittsfläche D = a b c d e f g h i schneidet alle Linien, die von einer Grundfläche znr andern gezogen sind in der Mitte, mithin auch die Kanten des Körpers, weil sie die Höhe halbirt. Zieht man nun von einem beliebigen Punct O der Basis Linien nach den Ecken

A, B, C, D, so werden auch diese in ihren Mitten k, l, m, n von der Fläche D geschnitten, wodurch diese, wenn man jene Mittelpuncte durch die in der Figur angedeuteten Linien verbindet, ein anscheinend gebrochenes Ansehen erhält, während doch diese Linien alle in derselben Ebne D liegen. Verbindet man nun noch O mit den Ecken der Basis und

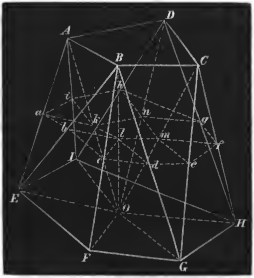

Fig. 3.

denkt sich durch die in der Fignr verzeichneten Linien Flächen gelegt, so zerfällt das Prismatoid in folgende drei Körpergrnppen:

1) Eine Pyramide ABCDO, deren Basis g, deren Höhe h, deren Inhalt mithin $\frac{g\,h}{3}$.

2) So viele dreiseitige Pyramiden, als G Dreiecke enthält, nämlich EOFB, FOGB, GOHC, HOID, IOEA, deren Basis zusammen $=$ G, deren Höhen $=$ h, deren Inhalt zusammen $= \frac{G\,h}{3}$.

3) So viele Tetraeder als g Seiten hat, nämlich ABOE, BCOG, DCOH, ADOI.

Um nun den Inhalt dieser Tetraeder zu bestimmen, bedienen wir uns folgendermassen des Hülfssatzes. Die Fläche D zerfällt in folgende drei Theile:

a) Das Polygon k l m n, dessen Inhalt, weil auf der halben Höhe der Pyramide A B C D O, $= \frac{g}{4}$.

b) So viele Dreiecke mef, ngh, kia, blc, cld als G Dreiecke enthält. Diese bilden die mittleren Durchschnittsflächen der dreiseitigen Pyramiden (2), ihr Inhalt beträgt also zusammen $= \frac{G}{4}$.

c) So viele Paralellogramme lmde, mngf, knhi, aklb, als g Seiten hat, welche die mittleren Durchschnittsflächen der unter (3) erwähnten Tetraeder bilden. Die Snmme dieser Paralellogramme beträgt also:

$$D - \frac{g}{4} - \frac{G}{4}.$$

Da nun die Höhe h zugleich der kürzeste Abstand der Kanten A B und E O, B C und O G, D C und O H, A D nnd O I ist, so ist nach dem Hülfssatze der Inhalt sämmtlicher Tetraeder

$$\frac{h}{3} \times 2 \left\{ D - \frac{g}{4} - \frac{G}{4} \right\} \text{ oder}$$

$$\frac{h}{3} \left\{ 2\,D - \frac{G + g}{2} \right\}. -$$

Addiren wir nun die auf diese Weise gefundenen Ausdrücke für den Inhalt der drei Körpergruppen, aus denen das Prismatoid besteht, so kommt

$$I = \frac{g\,h}{3} + \frac{G\,h}{3} + \frac{h}{3} \left\{ 2\,D - \frac{G + g}{2} \right\}$$

$$I = \frac{h}{3} \left\{ g + G - \frac{G}{2} - \frac{g}{2} + 2\,D \right\}$$

$$I = \frac{h}{3} \left\{ \frac{G + g}{2} + 2\,D \right\},$$ welches die oben erwähnte Formel für den Inhalt des Prismatoids ist. —

§. 2.

Folgerungen aus der Formel für den Inhalt des Prismatoids.

Da in der Formel $I = \frac{h}{3}\left\{\frac{G+g}{2} + 2D\right\}$ die Form und Grösse der Grundflächen ganz beliebig genommen, so kann die eine oder auch beide Null sein. Ferner können wir die Zahl der Seiten der beiden Grundflächen, von der die Formel ebenfalls unabhängig entwickelt, unendlich setzen, so wie die Seiten selbst unendlich klein, so dass dieselben krumme Linien werden und der Mantel von einer gekrümmten Fläche gebildet wird. Unter dieser Voraussetzung lassen sich also auch Körper, die von gekrümmten Oberflächen eingeschlossen sind, als Specialitäten des Prismatoids betrachten und nach der Formel cubiciren.

So finden wir den Inhalt der Kugel, indem wir G und g Null setzen, $h = 2r$, $D = r^2\pi$:

$$I = \frac{2r}{3} \times 2r^2\pi = \frac{4r^3\pi}{3}. —$$

Für den Inhalt eines Paraboloids, welches durch Umdrehung der gemeinen Parabel um ihre Abscissen-Axe entstand, dessen Höhe $= x$, der Radius der Basis $= y$, hat man aus der Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2px$, und wenn y' der Radius von D, $y'^2 = px$ mithin da $g = o$

$$I = \frac{x}{3}\left\{px\pi + 2px\pi\right\} = px^2\pi.$$

Für den Inhalt des Ellipsoids, das durch Umdrehung um die grosse Axe entsteht, sei die Höhe x, y der Radius der Basis G, y' der von D, $g = o$, so giebt die Scheitelgleichung:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{2ax - x^2\right\},\ y'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{ax - \frac{x^2}{4}\right\},$$

mithin in die Formel setzend:

$$I = \frac{x}{3}\frac{b^2\pi}{a^2}\left\{\frac{2ax - x^2}{2} + 2ax - \frac{x^2}{2}\right\}$$

$$I = \frac{x}{3}\frac{b^2\pi}{a^2}\left\{\frac{2ax - x^2 + 4ax - x^2}{2}\right\}$$

$$I = \frac{x}{3}\frac{b^2\pi}{a^2}\left\{3ax - x^2\right\} = \frac{b^2\pi x^2}{3a^2}\left\{3a - x\right\}.$$

Setzt man hierin $x = a$, so kommt für das halbe Ellipsoid:

$$I = \frac{2ab^2\pi}{3}. -$$

Von den vielen Anwendungen, welche diese so fruchtbare Formel zulässt, sei nur noch die Entwickelung der Simpson'schen Formel zur Berechnung von Körpern erwähnt, welche nach Dr. Wittstein folgendermassen abgeleitet wird. —

Es sei ein Körper von einer beliebigen krummen Oberfläche begränzt. Die Basis desselben bilde, wie in Fig. 4, die Ebne ACUW

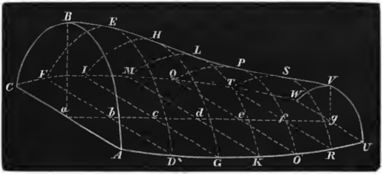

Fig. 4.

(die aber auch eine krumme Fläche sein könnte). An seinen beiden Enden schliesen ihn die auf der Basis senkrechten, unter sich paralellen Ebnen ABC und UVW. Der Körper sei durch den beiden Endflächen paralelle Ebnen DEF, GHI etc. in gleich dicke Scheiben getheilt. Die Theilungsebnen, deren Inhalt als bekannt vorausgesetzt wird, seien um die Grösse m von einander entfernt. Bezeichnen wir dieselben von ABC anfangend der Reihe nach mit a, b, c, d, e, f, g, so betrachten wir zuerst den Körper zwischen a und c als Prismatoid; dann sei $G = a$, $D = b$, $g = c$, mithin sein Inhalt nach der Formel:

$$I' = 2m\left\{\frac{a+c}{2} + 2b\right\}.$$

Ebenso ist der Inhalt des folgenden Körpers zwischen c und e:

$$I'' = 2m\left\{\frac{c+e}{2} + 2d\right\}.$$

Endlich der des Körpers zwischen e und g:

$$I''' = 2m\left\{\frac{e+g}{2} + 2f\right\}.$$

Summirt man nun, so ergiebt sich für den Inhalt des ganzen Körpers:

$$I = 2m\left\{\frac{a+c}{2} + 2b + \frac{c+e}{2} + 2d + \frac{e+g}{2} + 2f\right\}$$

$$I = 2m\left\{\frac{a+c+4b+c+e+4d+e+g+4f}{2}\right\}$$

$$I = m\left\{a + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + g\right\}.$$

Diese Formel ist mit der Simpson'schen Formel zur Berechnung von Flächen, die von einer Curve eingeschlossen sind, identisch, mit dem Unterschiede, dass dort die Grössen a, b, c etc. die Ordinaten der begränzenden Curve bedeuten, während sie hier die Areale der Theilungsebnen bezeichnen. Das Gesetz der Coefficienten ist einleuchtend und kann die Formel beliebig ausgedehnt werden, nur muss die Zahl der Theilungsebnen immer eine ungrade sein, damit man eine grade Zahl von Körpertheilen erhält. Man bedient sich dieser Formel seit Chapman zur Berechnung des Deplacements-Cubus beim Schiffsbau.

§. 3.

Vom Schwerpuncte des Prismatoids.

Es soll nun der senkrechte Abstand des Schwerpunctes des Prismatoids von der Basis G ermittelt werden, bevor wir aber diese Aufgabe lösen, soll folgender Hülfssatz vorausgeschickt werden:

Wenn man die Mittelpuncte zweier nicht in einer Ebne liegenden Kanten eines Tetraeders verbindet, so liegt der Schwerpunct des Körpers in der Mitte der Verbindungslinie.

In dem Tetraeder A B C D seien die Mitten der Kanten A C und B D, a und c miteinander durch die Grade a c verbunden, dann soll der Mittelpunct o dieser Linie zugleich der Schwerpunct des Körpers sein.

Um den Beweis zu führen, nehmen wir nur an, dass c die Mitte von D B sei und lassen die Puncte a und o vorläufig unbestimmt; alsdann verbinden wir c mit den Spitzen C und A, machen $cF = \frac{Cc}{3}$ und $cG = \frac{Ac}{3}$, so sind F und G die Schwerpuncte der Dreiecke B C D und A B D. Da nun der Schwerpunct eines Tetraeders bekanntlich auf einem Viertheil der Linie von der Basis aus liegt, welche den Schwerpunct derselben mit der Spitze verbindet, so sind die Graden C G und A F zwei Schwerlinien des Körpers und ihr Durchschnittspunct o der Schwerpunct desselben. Auch ist $oF = \frac{AF}{4}$ und $oG = \frac{CG}{4}$. Verbindet man nun c mit o und verlängert bis a, so muss bewiesen werden, dass a die Mitte der Kante A C und o die Mitte von a c sei.

Hierzu hat man zuerst nach einem bekannten Satze:

$\triangle\, Coc : \triangle\, CoA = Gc : GA = 1 : 2$ und ebenso:

$\triangle\, coA : \triangle\, Coc = Aa : aC$, woraus multiplicando:

$\triangle\, coA : \triangle\, CoA = Aa : 2aC$ und da ferner:

$\triangle\, coA : \triangle\, CoA = Fc : FC = 1 : 2$; so ist:

$Aa : 2aC = 1 : 2$, d. h. $Aa = aC$ oder a der Mittelpunct von A C. Um schliesslich zu zeigen, dass o die Mitte von a c, verbinde man F mit G, dann ist F G paralell A C, weil die Seiten C c und A c proportional von diesen Linien geschnitten werden. Ist nun L der Durchschnittspunct von a c und F G, so sind die Dreiecke F o L und a o A ähnlich und man hat: $oL : ao = oF : oA = 1 : 3$, daher $oL = \frac{ao}{3} = \frac{aL}{4}$. Nun ist: $aL = \frac{2ac}{3}$, weil $CF = \frac{2Cc}{3}$, mithin $oL = \frac{2ac}{12} = \frac{ac}{6}$ und da $Lc = \frac{ac}{3}$, so ist $oL + Lc = oc = \frac{ac}{6} + \frac{ac}{3} = \frac{ac}{2}$. Folglich ist o der Mittelpunct der Graden a c und zugleich der Schwerpunct des Tetraeders, wie zu beweisen war. —

Verbände man ebenso die Mitten der Kanten A D und B C durch die Grade b d, so würde o auch der Mittelpunct dieser Linie sein; der Schwerpunct des Tetraeders liegt mithin im Durchschnittspuncte der Diagonalen der mittleren Durchschnittsfläche a b c d. —

Wir gehen nun dazu über, die Schwerpunctsformel des Prismatoids abzuleiten. Mit Bezugnahme auf das, was bei der Entwickelung der Inhaltsformel gesagt, zerlegen wir das Prismatoid wieder in drei Gruppen von Körpern, aus denen es, wie dort gezeigt, zusammengesetzt ist. Diese sind:

1) Eine Pyramide A B C D O, deren Inhalt $\frac{gh}{3}$ war.

2) So viele dreiseitige Pyramiden F O G B, G O H C etc. als G Dreiecke enthält, deren Inhalt zusammen $\frac{Gh}{3}$ gefunden.

3) So viele Tetraeder BCGO, CDOH etc., als g Seiten hat, für deren Inhalt wir zusammen fanden $\frac{h}{3}\left\{2\,D - \frac{G+g}{2}\right\}$.

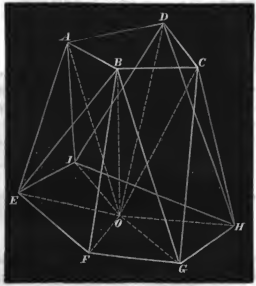

Fig. 5.

Betrachten wir nun die Basis G als Momenten-Ebne und suchen die einzelnen Momente der drei Theile in Bezug auf dieselbe, so ergiebt sich Folgendes:

a) Der Schwerpunct von 1) liegt auf $^1/_4$ der Höhe von g aus, der Hebelarm von G aus ist mithin $\frac{3\,h}{4}$ und das Moment von 1) $\left(\frac{g\,h}{3}\right)\frac{3\,h}{4}$.

b) Die Schwerpuncte der dreiseitigen Pyramiden von 2) liegen auf $\frac{h}{4}$ von G aus, mithin ist das Moment von 2) $\left(\frac{Gh}{3}\right)\frac{h}{4}$.

c) Die Schwerpuncte sämmtlicher Tetraeder von 3) liegen auf $\frac{h}{2}$, d. h. in der mittleren Durchschnittsfläche D nach dem oben bewiesenen

Satze, dass der Schwerpunct eines Tetraeders in der Mitte der Verbindungslinie der Mittelpuncte zweier nicht in einer Ebne liegenden Kanten sich befindet. Da nun diese Linien sämmtlich in D liegen, so liegen auch die Schwerpuncte, d. h. die Durchschnittspuncte der Diagonalen der mittleren Durchnittsflächen aller Tetraeder daselbst und das Moment von 3) ist $\frac{h}{3}\left(2D - \frac{G+g}{2}\right)\frac{h}{2}$.

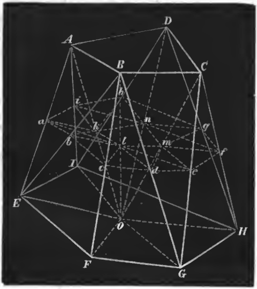

Fig. 6.

Nun ist nach dem bekannten Momentensatze: das Moment der Summe der einzelnen Theile gleich der Summe der Momente derselben. Bezeichnet also X den senkrechten Abstand des Schwerpunctes des Prismatoids und I, wie früher, seinen Inhalt, so ist

$$IX = \frac{gh}{3}\cdot\frac{3h}{4} + \frac{Gh}{3}\cdot\frac{h}{4} + \frac{h}{3}\left\{2D - \frac{G+g}{2}\right\}\frac{h}{2},$$

$$IX = \frac{h^2}{3}\left\{\frac{3g}{4} + \frac{G}{4} + D - \frac{G}{4} - \frac{g}{4}\right\}, \text{ also}$$

$$IX = \frac{h^2}{3}\left\{\frac{g}{2} + D\right\} \text{ nnd da}$$

$$I = \frac{h}{3}\left\{\frac{G+g}{2} + 2D\right\} \text{ war, so ist}$$

$$X = h\left\{\frac{\frac{g}{2} + D}{\frac{G+g}{2} + 2D}\right\}.$$

Dies ist die Formel für den senkrechten Abstand des Schwerpunctes des Prismatoids von der Grundfläche G, welche, dem allgemeinen Charakter des Körpers entsprechend, auf mancherlei Weise benutzt werden kann.

§. 4.

Anwendungen der Schwerpunctformel des Prismatoids.

Für die Kugel ist G und $g = 0$, $D = r^2\pi$, $h = 2r$, mithin:

$$X = 2r\,\frac{r^2\pi}{2r^2\pi} = r.$$

Für den abgestumpften Kegel, wo R und r die Radien von G nnd g nnd $\frac{R+r}{2}$ der von D, hat man mit Weglassnng von π oben nnd nnten,

$$X = h\left\{\frac{\frac{r^2}{2} + \frac{(R+r)^2}{4}}{\frac{R^2+r^2}{2} + \frac{(R+r)^2}{2}}\right\} \text{ oder}$$

$$X = \frac{h}{2}\left\{\frac{2r^2 + R^2 + 2Rr + r^2}{R^2 + r^2 + R^2 + 2Rr + r^2}\right\}, \text{ also}$$

$$X = \frac{h}{4}\left\{\frac{3r^2 + 2Rr + R^2}{r^2 + Rr + R^2}\right\}. —$$

Für die abgestumpfte Pyramide, wo G und g die beiden Grundflächen, h die Höhe bezeichnen, ist D zu bestimmen. Bezeichnen S und s zwei ähnlich liegende Seiten der Grundflächen G und g, so ist die ähnlich liegende Seite von D, $\frac{S+s}{2}$, mithin:

$$G : D = S^2 : \frac{(S+s)^2}{4},\ \sqrt{G} : \sqrt{D} = S : \frac{S+s}{2} \text{ und}$$

$$g : D = s^2 : \frac{(S+s)^2}{4},\ \sqrt{g} : \sqrt{D} = s : \frac{S+s}{2}, \text{ also}$$

$$\sqrt{G} = \frac{2 S \sqrt{D}}{S+s},\ \sqrt{g} = \frac{2 s \sqrt{D}}{S+s}$$

$$\sqrt{G} + \sqrt{g} = \frac{2 \sqrt{D}\,(S+s)}{S+s} \text{ woraus:}$$

$$D = \frac{G + 2\sqrt{Gg} + g}{4} \text{ also:}$$

$$X = h \left\{ \frac{\frac{g}{2} + \frac{G + 2\sqrt{Gg} + g}{4}}{\frac{G+g}{2} + \frac{G + 2\sqrt{Gg} + g}{2}} \right\} \text{ oder}$$

$$X = \frac{h}{4} \left\{ \frac{3g + G + 2\sqrt{Gg}}{g + G + \sqrt{Gg}} \right\}. —$$

Für die Halbkugel ist $g = 0, G = r^2\pi,\ D = \frac{3 r^2 \pi}{4}$ mithin:

$$X = r \left\{ \frac{\frac{3 r^2 \pi}{4}}{\frac{r^2\pi}{2} + \frac{3 r^2 \pi}{2}} \right\} = \frac{r}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3r}{8}. —$$

Für das Kugelsegment mit einer Grundfläche, deren Abstand vom Mittelpunct m sei, ist die Entfernung von D vom Mittelpunct $\frac{r+m}{2}$, mithin $D = \pi \left\{ r^2 - \frac{(r+m)^2}{4} \right\} = \pi \left\{ \frac{3 r^2 - 2 r m - m^2}{4} \right\}$ und da $G = \pi \{ r^2 - m^2 \},\ g = o,\ h = r - m,$

$$X = (r - m) \left\{ \frac{\frac{3r^2 - 2rm - m^2}{4}}{\frac{r^2 - m^2}{2} + \frac{3r^2 - 2rm - m^2}{2}} \right\}$$

$$X = \frac{r - m}{4} \left\{ \frac{3r^2 - 2rm - m^2}{2r^2 - rm - m^2} \right\}$$

$$X = \frac{r - m}{4} \frac{\{r - m\}\{3r + m\}}{\{r - m\}\{2r + m\}}$$

$$X = \frac{r - m}{4} \left\{ \frac{3r + m}{2r + m} \right\}.$$

Um die Entfernung des Schwerpunctes des Kugel-Segments mit zwei Oberflächen von der grösseren zu finden, seien gegeben die Abscissen der grösseren, G, gleich x und die der kleineren, g, gleich x′ vom Mittelpuncte, die Radien von G, D und g seien y, y'', y', so hat man: $y^2 = r^2 - x^2$, $y'^2 = r^2 - x'^2$, $y''^2 = r^2 - \frac{(x' + x)^2}{4}$.

Setzt man diese Ausdrücke in die Formel, so kommt mit Weglassung von π:

$$X = \{x' - x\} \left\{ \frac{\frac{r^2 - x'^2}{2} + r^2 - \frac{(x' + x)^2}{4}}{\frac{r^2 - x^2 + r^2 - x'^2}{2} + \frac{4r^2 - (x' + x)^2}{2}} \right\}$$

$$X = \frac{x' - x}{4} \left\{ \frac{2r^2 - 2x'^2 + 4r^2 - x'^2 - 2x'x - x^2}{6r^2 - x^2 - x'^2 - x'^2 - 2x'x - x^2} \right\}$$

$$X = \frac{x' - x}{4} \left\{ \frac{6r^2 - 3x'^2 - 2x'x - x^2}{3r^2 - x'^2 - x'x - x^2} \right\}. —$$

Es soll der Abstand des Schwerpunctes eines Paraboloids mit einer Grundfläche von derselben ermittelt werden.

Es sei die Höhe des Paraboloids x, der Radius der Grundfläche y, der der mittleren Durchschnittsfläche y′, so ist aus der Scheitelgleichung: $y^2 = 2px$, $y'^2 = px$ und da $g = 0$ mit Weglassung von π:

$$X = x \left\{ \frac{px}{px + 2px} \right\} = \frac{x}{3}. —$$

Für das Paraboloid mit 2 Oberflächen, sei x die Abscisse der grösseren G vom Scheitel aus, x' die der kleineren g, y und y' die Radien von G und g, so hat man, wenn y'' der Radius von D, aus der Scheitelgleichung:

$$y^2 = 2\,p\,x,\ y'^2 = 2\,p\,x',\ y''^2 = 2\,p \left\{ \frac{x' + x}{2} \right\} = p \left\{ x' + x \right\}$$

Setzen wir diese Werthe in die Formel, so kommt mit Weglassung von π:

$$X = \left\{ x - x' \right\} \left\{ \frac{p\,x' + p \left\{ x' + x \right\}}{p \left\{ x + x' \right\} + 2\,p \left\{ x + x' \right\}} \right\} \text{ oder}$$

$$X = \left\{ x - x' \right\} \left\{ \frac{2\,x' + x}{3\,x' + 3\,x} \right\} = \frac{x - x'}{3} \left\{ \frac{2\,x' + x}{x' + x} \right\}$$

Um den Abstand des Schwerpunctes eines Ellipsoiden-Segments, welches durch Umdrehung um die grosse Axe entstanden und nur eine Grundfläche G hat, von dieser zu finden, ist $g = o$, die Abscisse von G vom Mittelpuncte des Ellipsoids sei x, die Halbaxen der erzeugenden Ellipse a und b, so ist $h = a - x$. Der Radius der Grundfläche sei y, der der mittleren Durchschnittsfläche ,y', dann giebt die Mittelpunctgleichung der Ellipse:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ a^2 - x^2 \right\},\ ,y'^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ a^2 - \frac{(a + x)^2}{4} \right\}.$$

oder $,y'^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{3\,a^2 - 2\,a\,x - x^2}{4} \right\}$. Mithin finden wir durch Einsetzung dieser Werthe in die Formel und Weglassung von $\frac{\pi\,b^2}{a^2}$ im Zähler und Nenner:

$$X = \left\{ a - x \right\} \left\{ \frac{\frac{3\,a^2 - 2\,a\,x - x^2}{4}}{\frac{a^2 - x^2}{2} + \frac{3\,a^2 - 2\,a\,x - x^2}{2}} \right\} \text{ oder}$$

$$X = \frac{a - x}{4} \left\{ \frac{3\,a^2 - 2\,a\,x - x^2}{2\,a^2 - a\,x - x^2} \right\} = \frac{3\,a^2 - 2\,a\,x - x^2}{4\,(2\,a + x)}.$$

Setzt man hierin $x = o$, so findet sich für den Abstand des Schwerpunctes des halben Ellipsoids von seiner Grundfläche:

$$X = \frac{3a}{8}, \text{ wie für die Halbkugel.}$$

Will man den Abstand des Schwerpunctes eines abgestumpften Ellipsoids von der grösseren Grundfläche G finden, so sei, vorausgesetzt, dass der Körper durch Drehung um die grosse Axe entstanden, y der Radius von G, y' der von g, y'' der von D, die Abscisse von G aus dem Mittelpuncte sei x, die von g, x', alsdann giebt die Mittelpunctgleichung der erzeugenden Ellipse:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{a^2 - x^2\right\}, y'^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{a^2 - x'^2\right\},$$

$y''^2 = \frac{b^2}{a^2}\left\{a^2 - \frac{(x'+x)^2}{4}\right\}$, also, wenn wir diese Werthe in unsere Gleichung substituiren und wiederum $\frac{\pi b^2}{a^2}$ fortlassen:

$$X = \left\{x' - x\right\}\left\{\frac{\frac{a^2 - x'^2}{2} + a^2 - \frac{\left\{x' + x\right\}^2}{4}}{\frac{a^2 - x^2 + a^2 - x'^2 + 4a^2 - (x'+x)^2}{2}}\right\}$$

$$X = \frac{x' - x}{4}\left\{\frac{6a^2 - 3x'^2 - 2x'x - x^2}{3a^2 - x'^2 - x'x - x^2}\right\}. —$$

Es sei der Schwerpuncts-Abstand eines Körpers von folgender Entstehungsart von seiner Grundfläche, G, verlangt. Diese selbst sei eine Ellipse A B C D. Senkrecht über ihrer grossen Axe und dieser an Länge gleich und paralell befinde sich eine grade Linie E F in dem Abstande h. Eine andere grade, veränderliche Linie c b gleite mit ihrem einen Ende c längs E F von E nach F, während das andere Ende b fortwährend die Grund-Ellipse von A durch B bis C berühre. Von F gleite die Linie c b auf dieselbe Weise wieder nach E zurück, während ihr Endpunct b die andere Hälfte der Grund-Ellipse von C durch D bis A berührt. Alsdann erzeugt die Grade c b den Mantel des Körpers, dessen zu den Ebnen A C F E und A B C D senkrechte Durchschnitte lauter gleichschenklige Dreiecke sind.

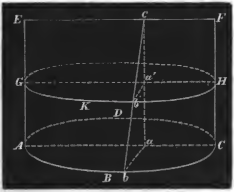

Fig. 7.

Dass nun alle Schnitte, welche durch den auf diese Weise entstandenen Körper mit der Basis paralell gelegt werden, auch Ellipsen sind, folgt also:

Es sei G K H ein Schnitt auf der Höhe $\frac{h}{m}$, wo m eine beliebige Zahl bedentet. Zieht man nun in dieser Durchschnittsfläche senkrecht auf G H $= 2a$ eine Ordinate der Curve G K H, $a'\,b' = y'$ nnd eine ihr paralelle $a\,b = y$ in der Grundebne, verbindet dann b mit b' und verlängert bis c, so ist b b' c eine grade Linie, lant Voraussetznng. Nun ist im Dreieck a b c,

$$y : y' = h : h - \frac{h}{m} \text{ also}$$

$y = \frac{y'}{1 - \frac{1}{m}}$ und wenn wir die Grösse $1 - \frac{1}{m}$ mit n bezeichnen nnd diesen Werth für y in die Mittelpunctgleichung der Basis setzen:

$$y^2 = \frac{y'^2}{n^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \text{ daher:}$$

$y'^2 = \frac{(n\,b)^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Dies ist die Gleichung der begränzenden

Curve des Schnittes durch G H, welche also wieder eine Ellipse, nur mit der kleinen Halbaxe n b ist. Um nun auf die Schwerpunctgleichung zu kommen und D zu finden, setzen wir $m = 2$, so ist $n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, d. h. die kleine Halbaxe von D ist $\frac{b}{2}$, wie schon an sich klar.

Da nun $G = a\,b\,\pi$, $D = \frac{a\,b\,\pi}{2}$, $g = o$, so ist:

$$X = h \left\{ \frac{\frac{a\,b\,\pi}{2}}{\frac{a\,b\,\pi}{2} + a\,b\,\pi} \right\} = \frac{h}{3}.$$

Zu diesem Resultat führt auch unmittelbar die Betrachtung, dass, wie schon bemerkt, alle Durchschnitte des Körpers, welche zur Basis und der Ebne A C F E senkrecht sind, gleichschenklige Dreiecke bilden, deren sämmtliche Schwerpuncte auf einem Drittheil ihrer Höhe liegen. Der Schwerpunct des Körpers liegt mithin in der Linie, welche alle jene Schwerpuncte verbindet, also auf $\frac{h}{3}$. Der Körper hat also die Eigenschaft, dass sein Schwerpunct mit dem eines mit ihm concentrischen Paraboloids von gleicher Höhe zusammen fällt.

Es soll der Abstand des Schwerpunctes des dreiaxigen Ellipsoidenstumpfes A B C D von seiner Grundfläche A B gefunden werden.

Es seien die Entfernungen der Ellipsen A B und C D vom Mittelpunct des Ellipsoids n, n m und n o gleich x und x′, so wie die der mittleren Durchschnittsfläche P Q, $n\,p = \frac{x + x'}{2}$, die Höhe des halben Ellipsoids $n\,M = a$. Dann sind die halben grossen Axen, m A, p Q, o D, Ordinaten der Ellipse N M R, deren grosse Halbaxe $n\,M = a$, deren kleine $n\,R = c$, so wie die halben kleinen Axen G m, E p, F o, Ordinaten der auf den Ellipsen N S R und N M R senkrechten S M V, deren grosse Halbaxe $n\,M = a$, deren kleine $S\,n = b$. Legt man nun die Mittelpunctgleichung zu Grunde, so ist:

$$(\mathrm{m\,A})^2 = \frac{c^2}{a^2} \left\{ a^2 - x^2 \right\},\ (\mathrm{m\,G})^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ a^2 - x^2 \right\}$$

$$(\mathrm{A\,p})^2 = \frac{c^2}{a^2} \left\{ a^2 - \frac{(x + x')^2}{4} \right\},\ (\mathrm{p\,E})^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ a^2 - \frac{(x + x')^2}{4} \right\}$$

$$(\mathrm{o\,D})^2 = \frac{c^2}{a^2} \left\{ a^2 - x'^2 \right\},\ (\mathrm{o\,F})^2 = \frac{b^2}{a^2} \left\{ a^2 - x'^2 \right\}.$$

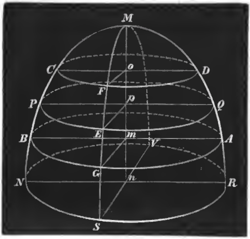

Fig. 8.

Bezeichnen nun, wie gewöhnlich G, D und g die 3 Durchschnittflächen, so ist:

$$G = \mathrm{A\,m.\ G\,m.}\ \pi = \frac{b\,c}{a^2} \left\{ a^2 - x^2 \right\} \pi$$

$$D = \mathrm{Qp.\ Ep.}\ \pi = \frac{b\,c}{a^2} \left\{ a^2 - \frac{(x + x')^2}{4} \right\} \pi$$

$$g = \mathrm{Do.\ Fo.}\ \pi = \frac{b\,c}{a^2} \left\{ a^2 - x'^2 \right\} \pi.$$

Demnach erhalten wir mit Fortlassung von $\frac{b\,c}{a^2}$ für den Abstand des Schwerpunctes von G:

$$X = \{x' - x\} \left\{ \frac{\frac{a^2 - x'^2}{2} + a^2 - \frac{(x + x')^2}{4}}{\frac{a^2 - x^2 + a^2 - x'^2}{2} + 2\left\{a^2 - \frac{(x + x')^2}{4}\right\}} \right\}.$$

Dies ist derselbe Ausdruck, den wir bei dem abgestumpften Rotations-Ellipsoid und dem Kugelsegment mit 2 Oberflächen fanden, und der sich reducirt also gestaltete:

$$X = \frac{x' - x}{4} \left\{ \frac{6a^2 - 3x'^2 - 2x'x - x^2}{3a^2 - x'^2 - x'x - x^2} \right\}$$

Setzt man hierin $x' = a$ und $x = o$, so kommt für den Abstand des Schwerpunctes des halben dreiaxigen Ellipsoids von seinem Mittelpuncte:

$$X = \frac{a}{4} \left\{ \frac{6a^2 - 3a^2}{3a^2 - a^2} \right\} = \frac{3a}{8}.$$

Mithin liegen die Schwerpunkte einer Halbkugel, eines halben Rotations-Ellipsoids und eines halben dreiaxigen Ellipsoids von gleicher Höhe in demselben Puncte, nämlich auf drei Achtel ihrer Höhe von der Basis aus.

Schliesslich wollen wir noch nachweisen, auf welche Art man die Formel anwenden kann, um daraus die Methode zur Berechnung des Schwerpunctes der von einem eingetauchten Schiffskörper verdrängten Wassermasse abzuleiten.

Es sei A B C U V W ein von einer gekrümmten Oberfläche begränzter Körper, der eine Ebne A U W C zur Basis hat und an seinen beiden Enden von zwei paralellen zur Basis senkrechten Ebenen A B C und U V W geschlossen wird. Der Körper sei in Bezug auf eine durch die Mitten von A C und U W gelegte, zur Basis senkrechte Ebne B B' V V' symmetrisch. Sein Schwerpunct liegt mithin in dieser Ebne und es kommt nur darauf an, den Abstand desselben von der Ebne A B C und der Basis zu ermitteln. Denken wir uns den Körper durch eine ungrade Zahl von auf der Basis senkrechten und den Ebnen A B C und U V W paralellen, gleich weit von einander entfernten Theilungsebnen D E F, G H I etc. in eine grade Anzahl von gleich dicken

Schichten zerlegt. Die Areale der Theilungsebnen seien mit ABC anfangend, ausgedrückt durch die bekannten Grössen a, b, c, d, e, f, g.

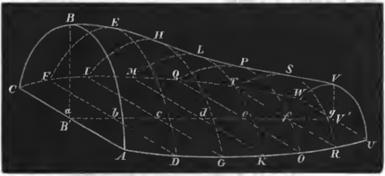

Fig. 9.

Betrachten wir nun zuerst den Körpertheil zwischen a und c als **Prismatoid, so ist nach der Formel**

$$X = h \left\{ \frac{\frac{g}{2} + D}{\frac{G+g}{2} + 2\,D} \right\}$$

der Abstand des Schwerpunctes dieses Theiles von der Ebne ABC, wenn wir mit m die constante Entfernung der Theilungsebnen von einander bezeichnen und $G = a$, $D = b$, $c = g$ setzen:

$$x' = 2\,m \left\{ \frac{\frac{c}{2} + b}{\frac{a+c}{2} + 2\,b} \right\}.$$

Da nun das Volumen dieses Theiles nach der Formel für den Inhalt des Prismatoids $I = \frac{h}{3}\left\{ \frac{G+g}{2} + 2\,D \right\}$ sein würde:

$v' = \frac{2\,m}{3}\left\{ \frac{a+c}{2} + 2\,b \right\}$, so ist das Moment dieses Theils in Bezug auf die Ebne ABC:

$$m' = x'v' = \frac{4\,m^2}{3}\left\{ \frac{c}{2} + b \right\}. —$$

Gehen wir nun zu dem Körpertheil zwischen c nnd e über, so ist der Abstand des Schwerpunctes desselben von der Ebene c, wenn wir für a, b, c jetzt c, d, e setzen:

$$2\,\mathrm{m}\left\{\frac{\frac{e}{2}+d}{\frac{c+e}{2}+2d}\right\}$$

und von der Ebne A B C:

$$x'' = 2\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m}\left\{\frac{\frac{e}{2}+d}{\frac{c+e}{2}+2d}\right\} \text{ oder}$$

$$x'' = 2\,\mathrm{m}\left\{\frac{\frac{c+e}{2}+2d+\frac{e}{2}+d}{\frac{c+e}{2}+2d}\right\}$$

und da das Volumen dieses Körpertheiles:

$$v'' = \frac{2\,\mathrm{m}}{3}\left\{\frac{c+e}{2}+2d\right\},$$

so ist sein Moment in Bezug auf die Ebne A B C:

$$m'' = x''v'' = \frac{4\,\mathrm{m}^2}{3}\left\{\frac{c+e}{2}+2d+\frac{e}{2}+d\right\}.$$

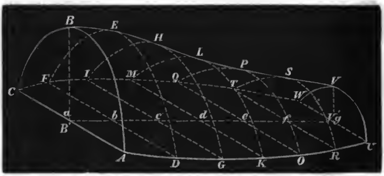

Fig. 10.

Ebenso findet sich für den letzten Körpertheil zwischen e und g der Abstand des Schwerpunctes von der Ebne e:

$$2\,m \left\{ \frac{\frac{g}{2} + f}{\frac{e+g}{2} + 2f} \right\}$$

und von der Ebne A B C:

$$x''' = 4\,m + 2\,m \left\{ \frac{\frac{g}{2} + f}{\frac{e+g}{2} + 2f} \right\} \text{ oder}$$

$$x''' = \frac{4\,m \left\{ \frac{e+g}{2} + 2f \right\} + 2\,m \left\{ \frac{g}{2} + f \right\}}{\frac{e+g}{2} + 2f}.$$

Da nun das Volumen dieses letzten Körpertheiles: $v''' = \frac{2m}{3} \left\{ \frac{e+g}{2} + 2f \right\}$, so ist sein Moment in Bezug auf die Ebne A B C

$$m''' = x'''\,v''' = \frac{8\,m^2}{3} \left\{ \frac{e+g}{2} + 2f \right\} + \frac{4\,m^2}{3} \left\{ \frac{g}{2} + f \right\}.$$

Bedienen wir uns nun des bekannten Momentensatzes und bezeichnen mit V das Volumen des ganzen Körpers, mit X den gesuchten Abstand seines Schwerpunctes von ABC, so kommt für sein Moment:

$M = X\,V = x'\,v' + x''\,v'' + x'''\,v'''$, oder wenn wir die gefundenen Werthe einsetzen:

$$X\,V = \frac{m^2}{3} \left\{ 2c + 4b + 2c + 2e + 8d + 2e + 4d + 4e + 4g + 16f + 2g + 4f \right\}$$

oder

$$X\,V = \frac{m^2}{3} \left\{ 4\,b + 4\,c + 12\,d + 8\,e + 20\,f + 6\,g \right\}.$$

Fügt man der Symmetrie halber noch das Glied $a \times 0$ in der Klammer hinzu und zerlegt die Coefficienten, wie folgt, so erscheint die Formel in der gebräuchlichen Gestalt:

$$X\,V = \frac{m^2}{3} \left\{ a \times 0 + 4b \times 1 + 2c \times 2 + 4d \times 3 + 2e \times 4 + 4f \times 5 + g \times 6 \right\}$$

und da der Inhalt V oben nach der erweiterten Simpson'schen Formel gefunden war, so erhalten wir durch Einsetzung dieses Werthes:

$$X = \frac{m}{3}\left\{\frac{a \times 0 + 4b \times 1 + 2c \times 2 + 4d \times 3 + 2e \times 4 + 4f \times 5 + g \times 6}{a + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + g}\right\}.$$

Dies ist die gewöhnliche Formel, deren man sich bei der Schwerpunctbestimmung des Deplacements bedient und die mich veranlasste, diesen Gegenstand zu verfolgen.

Das Gesetz, nach dem die Coefficienten gebildet werden, ist leicht erkennbar und werden beim practischen Gebrauche so viel Theilungsebnen eingeführt, als man für nöthig hält, um den räumlichen Inhalt mit erforderlicher Schärfe zu bestimmen.

Wird der Körper abermals durch Ebnen paralell der Basis getheilt, so würde ein ähnliches Verfahren den Abstand des Schwerpunctes von dieser ergeben. Der letzte übrigbleibende Theil an der Spitze, den man durch entsprechende Theilung beliebig klein machen kann, wird dann, wie dies gewöhnlich geschieht, als Pyramide in Rechnung gezogen.

Druck von C. Grumbach in Leipzig.